

Title	無限回連続微分可能函数ニ関スル一定理
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 29 p.1-p.2
Issue Date	1935-02-12
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74009
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

87. 無限回連続微分可能函数ニ 關スル一定理

南 雲 道 夫 (阪大)

無限回連続微分可能ナ函数ハ 非帯ニ多クノ自由度ヲ有ス
ルコトハ大体想像サレルコトデアレガ、之ニツイテ次ノ簡單
ナ定理ヲ紹介シテ置キマセウ。

i 個ノ独立変數 (x_1, \dots, x_i) ニツキ無限回連続微分可能
函数デ $x_1 = \dots = x_i = 0$ ニ於ケル値及ビ スベテノ微係數 が
アラカシメ任意ニ與ヘヌ値ニ等シイモノが存在スル。即チ
 A_{n_1, n_2, \dots, n_i} ヲハ任意ノ實數トスル時ニ (n_1, \dots, n_i
ハ零又ハ任意ノ自然數)

$$\left(\frac{\partial^{n_1 + \dots + n_i} f}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_i^{n_i}} \right)_0 = A_{n_1, \dots, n_i}$$

ナル函数 $f(x_1, \dots, x_i)$ が存在スル。 (\quad)₀ ハ $x=0$ ノ事
デアリ。

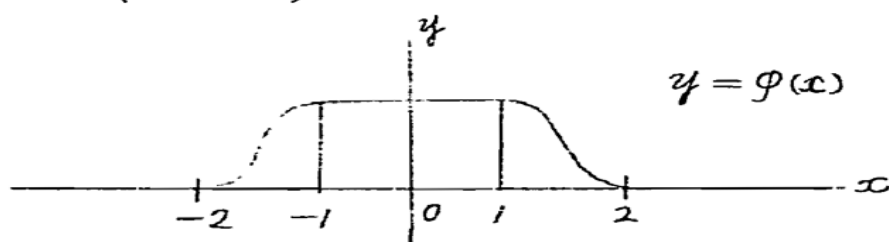
〔証明〕 $\varphi(x)$ ヲバ $x \leq -2$ デ 0 , $-2 \leq x \leq -1$ デ正單
調増加, $-1 \leq x \leq +1$ デ 1 , $1 \leq x \leq 2$ デ單調減少, $2 \leq x$
デ 0 ナル無限回連続微分可能函数トスル。例ヘバ

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \quad \text{ノ時} \\ e^{\frac{-1}{x(1-x)}} & 0 < x < 1 \quad \text{ノ時} \\ 0 & 1 \leq x \quad \text{ノ時} \end{cases}$$

トスルバ

$$\varphi(x) = \frac{\int_{-\infty}^x [\psi(t+2) - \psi(t-1)] dt}{\int_0^1 \psi(t) dt}$$

トスレバヨイ。(圖参照)



$$\varphi(x_1) - \dots - \varphi(x_i) = \bar{\Phi}(x) \text{ トオ } \gamma.$$

次 = $n_1 + n_2 + \dots + n_i = n$ トシテ n 次ノ等次多項式

$P_n(x)$ ヲバ

$$P_n(x) = \sum_{\left(\sum_{\nu=1}^i n_\nu = n\right)} \frac{A_{n_1, \dots, n_i} x_1^{n_1} \dots x_i^{n_i}}{n_1! \dots n_i!}$$

ニヨツテ定義シ、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(r_n x) P_n(x) \quad (r_n > 0)$$

ナル無限級數ヲ考ヘ、 r_n ヲ適當ニキヌレバ $f(x)$ 及ビソノ高次導函數ノ項別微分ノ級數ハスベテ一樣ニ收斂スル。

ソノ理由ハ $\Phi(r_n x) P_n(x)$ ノ $n-1$ 回マデノ導函數ノ値ハ (n -定トシ) $r_n \rightarrow \infty$ ノ時一樣ニ零ニ近ヅクカラ、 r_n ヲバ $\Phi(r_n x) P_n(x)$ ノ m 回 ($m \leq n-1$) 導函數ガスベテ $\frac{1}{2^n} (n > 0)$ ヨリ小サクナル様ニキヌラレルカラデアアル。シカモ亦 f ニツイテノ $x=0$ ニ於ケル n 階ノ導函數ノ値ハ寸度 $P_n(x)$ ノ n 階ノ導函數ノ値ト一致スル。

之ヲ問題ハ証明サレタ。(詳シクハ讀者自身デ御考ヘ下サイ)

尚此ノ函數ハ $\sum_{\nu=1}^i x_\nu^2 \geq \varepsilon_0$ デ恒等的ニ零ニ出來マス。($\varepsilon_0 > 0$)